~ CURS 5 ~

III.6. Ecuațiile Kirchhoff în formă simbolică

Pentru circuitele electrice liniare, formate din rezistoare, bobine, condensatoare, surse independente și/sau comandate de tensiune și curent, ecuațiile teoremelor lui Kirchhoff în instantanee au următoarele expresii:

$$\sum_{k\in N_j} i_k(t)=0,\ j=\overline{1,n-1}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in B_h}\left[R_k i_k(t)+L_k\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t}+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}L_{kp}\frac{\mathrm{d}i_p(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C_k}\int i_k(t)\mathrm{d}t\right]+\\&+\sum_{k\in B_h}\left[u_{J_k}(t)+u_{J_{ck}}(t)\right]=\sum_{k\in B_h}\left[e_k(t)+e_{ck}(t)\right]\end{aligned},\ n=\overline{1,B}$$

Ținând cont de teoremele prezentate anterior, se obțin formulele în complex ale ecuațiilor:

$$\sum_{k\in N_j}\underline{I}_k=-\sum_{k\in N_j}\left(\underline{J}_k+\underline{J}_{ck}\right),\ j=\overline{1,n-1}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in B_h}\left[R_k\underline{I}_k+j\omega L_k\underline{I}_k+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}j\omega L_{kp}\underline{I}_p+\frac{1}{j\omega C_k}\underline{I}_k\right]+\\&+\sum_{k\in B_h}\left[\underline{U}_{J_k}+\underline{U}_{J_{ck}}\right]=\sum_{k\in B_h}\left[\underline{E}_k+\underline{E}_{ck}\right]\end{aligned},\ h=\overline{1,B}$$

<u>Prima teoremă a lui Kirchhoff</u>: suma algebrică a reprezentărilor în complex ale curenților laturilor conectate într-un nod este egală cu zero.

<u>A doua teoremă a lui Kirchhoff</u>: suma algebrică a reprezentărilor în complex ale căderilor de tensiune rezistive, inductive, capacitive, de la bornele surselor ideale independente și/sau comandate de curent este egală de-a lungul fiecărei bucle cu suma algebrică a reprezentărilor în complex ale tensiunilor electromotoare ale surselor independente și/sau comandate de tensiune.

O scriere mai compactă a ecuațiilor se poate obține cu ajutorul mărimi $\underline{Z}$, numită impedanță complexă.

$$\underline{Z}_{R_k}=R_k,\quad \underline{Z}_{L_k}=j\omega L_k,\quad \underline{Z}_{C_k}=\frac{1}{j\omega C_k}\ \text{și}\ \underline{Z}_{K_p}=j\omega L_{K_p}:$$

$$\sum_{k\in N_j}\underline{I}_k=-\sum_{k\in N_j}\left(\underline{J}_k+\underline{J}_{ck}\right),\ j=\overline{1,n-1}$$

$$\sum_{k\in B_h}\left[\underline{Z}_k\underline{I}_k+\sum_{p=1,p\neq k}^{l}\underline{Z}_{k_p}\underline{I}_p+\underline{U}_{j_k}+\underline{U}_{j_{ck}}\right]=\sum_{k\in B_h}\left[\underline{E}_k+\underline{E}_{ck}\right],\ h=\overline{1,B},$$

cu $\underline{Z}_k=\underline{Z}_{R_k}+\underline{Z}_{L_k}+\underline{Z}_{C_k}$

Analogia formală între ecuațiile circuitelor de curent continuu și ecuațiile în complex, permit extinderea metodelor de analiză și a teoremelor în curent continuu și pentru circuitele de curent alternativ, cu corespondențele:

$$I\leftrightarrow\underline{I};\quad U\leftrightarrow\underline{U};\quad E\leftrightarrow\underline{E};\quad J\leftrightarrow\underline{J};\quad R\leftrightarrow\underline{Z}$$

III.7. Teorema lui Joubert (legea lui Ohm în complex)

Pentru o latură de circuit completă, caracterizată de un rezistor, o bobină (cuplată magnetic eventual), un condensator și o sursă de tensiune electromotoare, ecuația tensiunii la borne în valori instantanee este:

$$u_k(t) = R_k i_k(t) + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} L_{k_p} \frac{di_p(t)}{dt} + \frac{1}{C_k}\int i_k(t)dt - e_k(t)$$

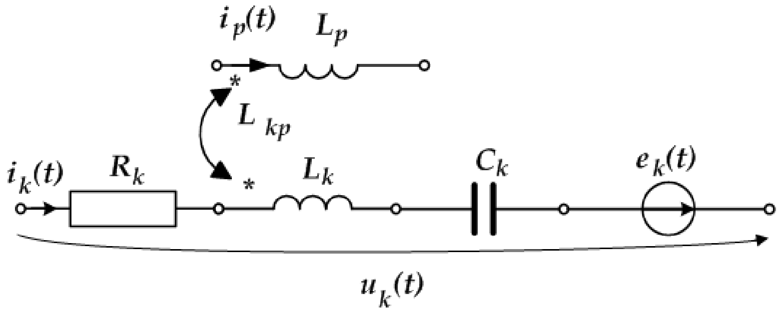

Fig. 3.13. Latura completă de circuit în domeniul timp

În complex, acesta devine:

$$\underline{U}_k + \underline{E}_k = (R_k + j\omega L_k - \frac{j}{\omega C_k})\underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} j\omega L_{k_p} \underline{I}_p \Rightarrow \underline{U}_k + \underline{E}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} \underline{Z}_{k_p} \underline{I}_p ,$$

care reprezintă *legea lui Ohm în complex* (*teorema lui Joubert*).

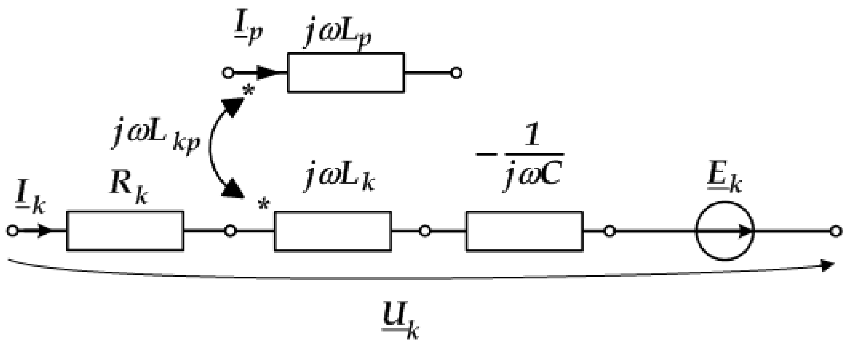

Fig. 3.14. Latura completă de circuit în complex

Dacă circuitul nu are cuplaje magnetice $(\underline{Z}_{k_p} = 0)$:

$$\underline{U}_k + \underline{E}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k \tag{3.26}$$

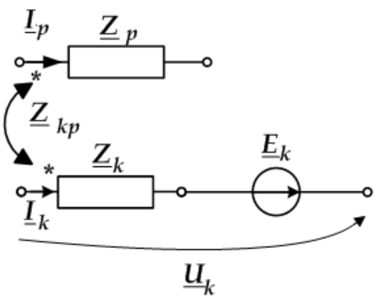

Fig. 3.15. Latura completă restrânsă de circuit în complex

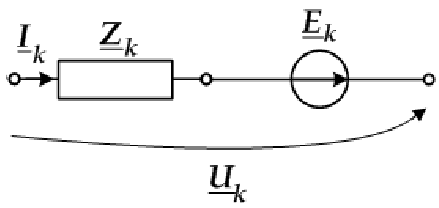

Fig. 3.16. Latura completă de circuit în complex, fără cuplaj magnetic

III.8. Circuite electrice fără cuplaje magnetice în regim sinusoidal

A. Circuite serie

În mod asemănător conectării în curent continuu și în acest caz vom folosi pentru determinarea formulelor de echivalență, *n* laturi active de tipul unor surse reale de tensiune:

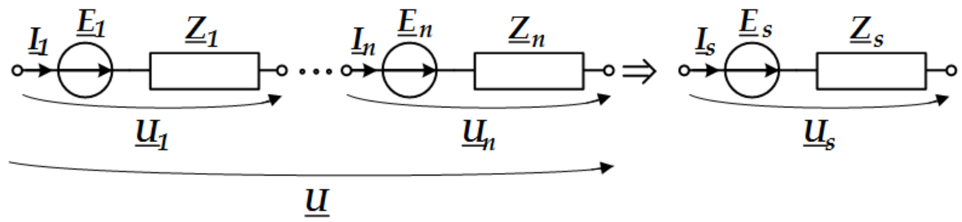

Fig. 3.17. Conectarea a *n* laturi complexe în serie

$$\underline{U}=\sum_{k=1}^{n}\underline{U}_k=\sum_{k=1}^{n}(\underline{Z}_k\underline{I}_k-\underline{E}_k)=(\sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k)\underline{I}-\sum_{k=1}^{n}\underline{E}_k \Rightarrow \underline{Z}_s=\sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k \text{ și } \underline{E}_s=\sum_{k=1}^{n}\underline{E}_k$$

$$\underline{U}=\underline{Z}_s\cdot\underline{I}-\underline{E}_s$$

B. Circuitul R,L,C serie. Rezonanța de tensiune

Se consideră un rezistor, o bobină și un condensator înseriate, alimentate de la o tensiune sinusoidală $u(t)$.

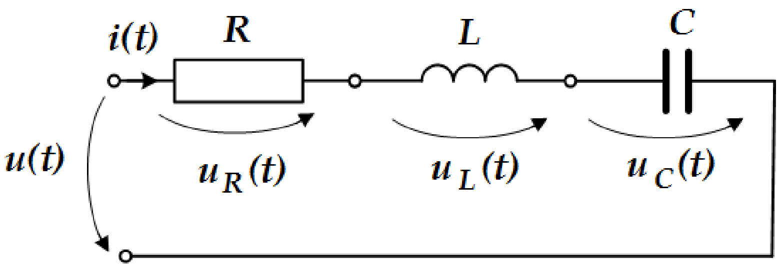

Fig. 3.18. Circuitul RLC serie în domeniul timp

În domeniul timp, ecuația de tensiuni la bornele circuitului este următoarea:

$$u(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t$$

În complex, rezultă următoarele:

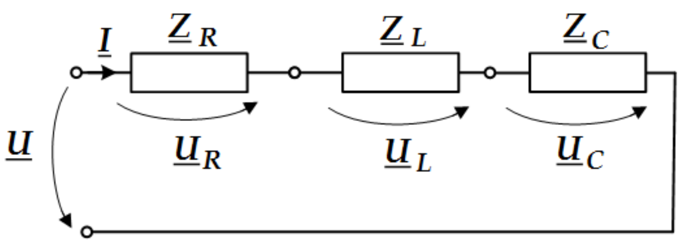

Fig. 3.19. Circuitul RLC serie în complex

$$\underline{U}=\underline{U}_R+\underline{U}_L+\underline{U}_C=\underline{I}(R+j\omega L-\frac{j}{\omega C}),$$

$$\underline{Z}=R+j\omega L-\frac{j}{\omega C}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{X_e}{R}, \quad X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \qquad I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Se spune că circuitul este la rezonanță când $\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0$, cele două tensiuni având în acest moment valoarea maximă, U_{L_0}, respectiv U_{C_0}, ceea ce dă numele fenomenului de rezonanță de tensiune:

$$\underline{I} \cdot j\omega L + \underline{I}(-\frac{j}{\omega C}) = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow X_L = X_C,$$

numită <u>*condiție de rezonanță*</u>.

Din egalitatea anterioară rezultă pulsația de rezonanță, respectiv frecvența de rezonanță:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Consecințe ale fenomenului de rezonanță a tensiunii:

a. tensiunea aplicată circuitului se regăsește în totalitate la bornele rezistorului;
b. valoarea impedanței circuitului este minimă, $|Z| = R$;
c. valoarea curentului este maximă, $I_0 = \frac{U}{R}$;
d. valoarea argumentului impedanței complexe este nulă, $\varphi = 0$;
e. puterea reactivă absolută este nulă, $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 0$.

În figura 3.20a este reprezentată variația curentului electric prin circuitul RLC serie, iar în figura 3.20b cea a argumentului φ.

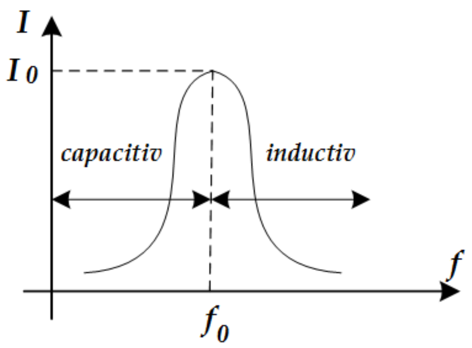

Fig. 3.20a. Variația curentului electric în circuitul RLC serie

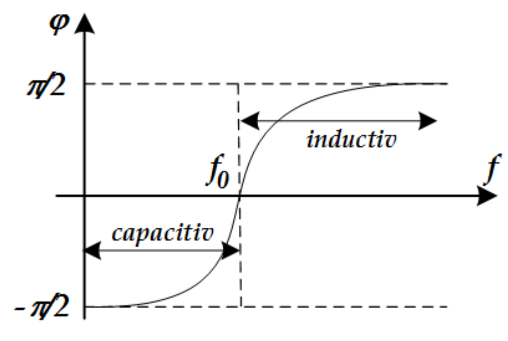

Fig. 3.20b. Variația argumentului impedanței în circuitul RLC serie

Se poate defini astfel Q_C - factorul de calitate al circuitului:

$$Q_C \stackrel{d}{=} \frac{U_{L_0}}{U} = \frac{U_{C_0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{R_0}{R}$$

unde s-a notat cu $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

<u>C. Circuite derivație</u>

În mod asemănător conectării în curent continuu și în acest caz vom folosi pentru determinarea formulelor de echivalență, *n* laturi active de tipul unor surse reale de tensiune:

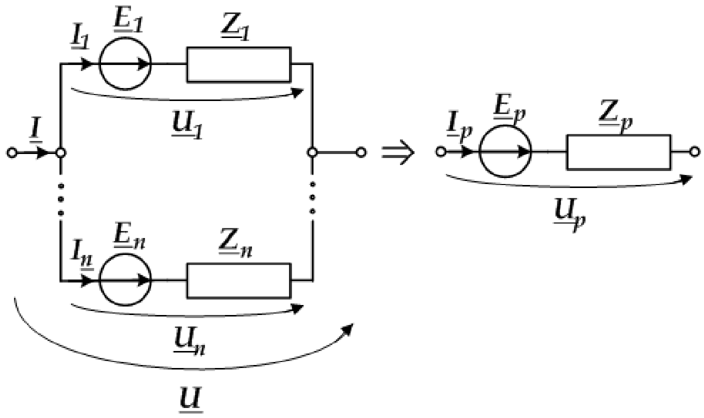

Fig. 3.21. Conectarea a *n* laturi în paralel în complex

$$\left.\begin{array}{l} \underline{I}=\sum_{k=1}^{n}\underline{I}_k=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\underline{U}_k+\underline{E}_k}{\underline{Z}_k}=\underline{U}\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\underline{Z}_k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k} \\ \underline{I}=\underline{U}\cdot\dfrac{1}{\underline{Z}_p}+\dfrac{\underline{E}_p}{\underline{Z}_p} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\underline{Z}_p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\underline{Z}_k}\ \text{sau}\ \ \underline{Y}_p=\sum_{k=1}^{n}\underline{Y}_k\quad \text{și}\ \ \underline{E}_p=\frac{\sum_{k=1}^{n}\underline{Y}_k\cdot\underline{E}_k}{\sum_{k=1}^{n}\underline{Y}_k}$$

D. Circuitul R, L, C paralel. Rezonanța de curent

Se consideră un rezistor, o bobină și un condensator conectate în paralel, alimentate de la o tensiune sinusoidală $u(t)$.

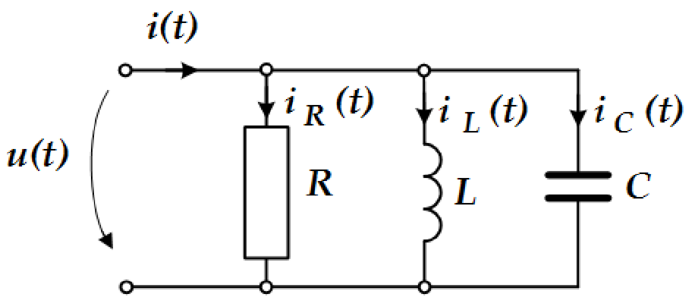

Fig. 3.22. Circuitul RLC derivație în domeniul timp

În domeniul timp, ecuația de curenți la bornele circuitului este următoarea:

$$i(t)=i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=\frac{u(t)}{R}+\frac{1}{L}\int u(t)\mathrm{d}t+C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

În complex, rezultă următoarele:

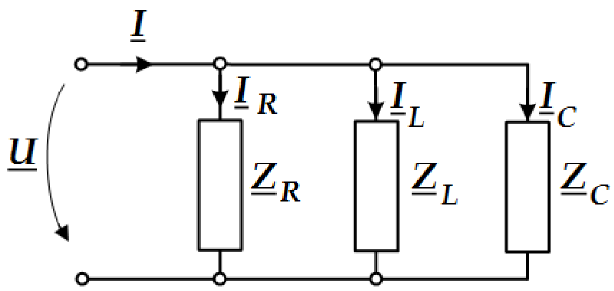

Fig. 3.23. Circuitul RLC derivație în complex

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C \Rightarrow \underline{I} = \underline{U}(\frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} + j\omega C) \quad \underline{Y} = G - \frac{j}{\omega L} + j\omega C;$$

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{B_e}{G} \quad B_e = \omega C - \frac{1}{\omega L}; \quad I = Y \cdot U = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)}$$

Se spune că circuitul este la rezonanță atunci când $\underline{I}_L + \underline{I}_C = 0$, cei doi curenți având în acest moment valorile maxime I_{L_0}, respectiv I_{C_0}, ceea ce dă numele fenomenului de rezonanță de curent.

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = 0 \Rightarrow \underline{U}(-\frac{j}{\omega L} + j\omega C) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \omega C \Rightarrow B_L = B_C,$$

numită *condiția de rezonanță.*

Ca și în cazul rezonanței de tensiune, pulsația și frecvența de rezonanță au valorile:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Consecințe ale fenomenului de rezonanță a curentului:

a. curentul total absorbit de circuit la rezonanță se regăsește în totalitate pe rezistor;

b. valoarea admitanței circuitului este minimă: $|\underline{Y}| = G$;

c. valoarea curentului debitat de circuit este minimă:

$$I_{\min} = I_0 = Y \cdot U = \frac{U}{R}$$

d. valoarea argumentului impedanței complexe este nulă: $\varphi = 0$;

e. puterea reactivă absorbită este nulă, $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 0$.

Factorul de calitate al circuitului are expresia:

$$Q_C \overset{d}{=} \frac{I_{L_0}}{I_0} = \frac{I_{0_0}}{I_0} = \frac{U_L}{\omega_0 L} \cdot \frac{R}{U} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{R_0}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$